

- 1 次の分布関数について X の平均値 $\bar{X}$ と分散 σ^2 を求めよ。 $P(\cdots)$ は、「 $\cdots$ が満たされる確率」を表す。

(a) ポアソン分布

$$P(X = x) = \frac{\mu^x}{x!} e^{-\mu} \quad (x = 0, 1, 2, \cdots; \mu > 0 \text{ は定数})$$

(b) 指数分布 ($\alpha > 0$ は定数)

$$P(x \leq X \leq x + dx) = \begin{cases} 0 & (-\infty < x < 0) \\ \alpha e^{-\alpha x} dx & (0 \leq x < +\infty) \end{cases}$$

- 2 一回投げる度に、表が出る確率が p で、裏が出る確率が $q = 1 - p$ であるコインを用意する。このコインを N 回続けて投げる試行を考える。

(a) 表が r 回出る確率 P_r を求めよ。

(b) (a) で求めた確率を用いて、表が出る回数 r の平均値と分散を求めよ。

- 3 階乗 $n!$ について n が非常に大きい場合の近似式 (スターリングの公式) を次の手続きで求めよう。

(a) 積分 $\Gamma(t) = \int_0^{+\infty} dx x^{t-1} e^{-x}$ で定義される関数 $\Gamma(t)$ (ガンマ関数) について、 $\Gamma(t+1) = t\Gamma(t)$ を示し、その結果を利用して $n! = \Gamma(n+1)$ を示せ。

(b) ガンマ関数 $\Gamma(n+1)$ ($= n!$) の積分表示において、積分変数 x を ny と置き、 $n!$ を

$$n! = C_n \int_0^{+\infty} dy e^{-nf(y)}$$

と書き換えよ。関数 $f(y)$ を極小 $y = y_0$ の回りに

$$f(y) = f(y_0) + \frac{1}{2} f''(y_0) (y - y_0)^2 + \cdots$$

とテイラー展開して、 $(y - y_0)^3$ 以上の項を無視して、 $n!$ の近似値を求めよ。このとき y についての積分では $z = \sqrt{n/2}(y - y_0)$ という変数変換を行い、変換後の積分の下限 $-\sqrt{n/2}y_0$ を $-\infty$ として良い。(鞍部点法)

- 4 (a) 問題 2 (a) で求めた確率 P_r の対数 $\log P_r$ において、 $N, N-r, r$ の全てが大きいとして、スターリングの公式を適用せよ。ただし、3 で求めたスターリングの公式をさらに近似した公式、 $\log n! \approx n \log n - n$ を用いよ。さらに、 $r = Ns$ において式を整理せよ。

- (b) (a) で求めた式を $\phi(s)$ とおき、 $\phi(p), \phi'(p), \phi''(p)$ をそれぞれ計算せよ。(' は s による微分)

- (c) $|s-p| \sim O(1/\sqrt{N})$ ($|s-p|$ の大きさが高々 $1/\sqrt{N}$ 程度) であると仮定して、 $\phi(s)$ を

$$\phi(s) \approx \phi(p) + \phi'(p)(s-p) + \frac{1}{2}\phi''(p)(s-p)^2$$

とテーラー展開せよ。(3 次以上の項は $1/\sqrt{N}$ より小さいオーダーとなるため無視できる)

- (d) (c) の結果を用いて、 P_r を計算せよ。そのとき、 r を連続な変数とみなし、確率の規格化条件を用いよ (ガウス分布と比較せよ)。

(注) 3 で求めたスターリングの公式をそのまま用いても、上と同様に計算ができる。その場合、規格化条件を用いなくても P_r が求まる。

- 5 次の公式を導出せよ。

- (a)

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

- (b)

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^{2n} e^{-ax^2} dx = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2^n a^n} \sqrt{\frac{\pi}{a}} \quad (n \geq 1)$$

- (c)

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^{2n+1} e^{-ax^2} dx = \frac{n!}{2a^{n+1}} \quad (n \geq 0)$$