

- 1 10本中3本当たりが入っているくじは、何番目に引くと当たりの確率が一番大きいか。但し、引いたくじは元に戻さないとする。

- 2 確率変数 X について、次の関数

$$\phi_X(\xi) = \langle e^{i\xi X} \rangle = \begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{i\xi x} \rho(x) & (X \text{ が連続分布し、その分布関数が } \rho(x) \text{ の場合}) \\ \sum_x e^{i\xi x} p_x & (X \text{ が離散分布し、} X = x \text{ となる確率が } p_x \text{ の場合}) \end{cases}$$

を特性関数と呼ぶ。ただし、 $\langle \dots \rangle$ は平均を表す。

- (a) 特性関数をべき展開することによって n 次のモーメントが求められることを示せ。ここで、 n 次モーメント m_n とは、

$$m_n = E((x - \mu)^n)$$

で表される量のことである。

次の分布に従う確率変数 X について特性関数を計算せよ。また、1次、2次モーメントをそれぞれ求めよ。

- (b) 二項分布：確率変数 X は離散的で全ての非負整数値を取り、 $X = x$ となる確率は

$$p_x = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \quad (x = 0, 1, 2, \dots, n)$$

- (b) ポアソン分布：確率変数 X は離散的で全ての非負整数値を取り、 $X = x$ となる確率は

$$p_x = \frac{\mu^x}{x!} e^{-\mu} \quad (x = 0, 1, 2, \dots; \mu > 0 \text{ は定数})$$

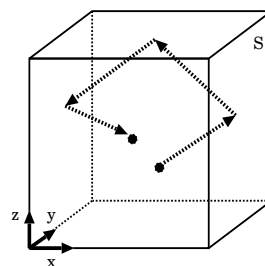
- (c) ガウス分布（正規分布）：確率変数 X は連続で全ての実数値を取り、分布関数は

$$\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right) \quad (m \text{ は平均、}\sigma^2 \text{ は分散})$$

- 3 2項分布 $B(n, p)$ において、 $p \sim 1/2$ のとき、 n を十分大きくしていくと、その分布は正規分布に近づく。このことを、両分布の特性関数を比較することで示せ。

- 4 一辺 L の立方体容器に入った N 個の分子から成る理想気体について問に答えよ。

- (a) x 方向の速度成分が v_x である分子が時間 t の間に壁 S に衝突する回数と一回の衝突当たり壁に及ぼす力積を求めよ。ただし、この分子は他の分子とは衝突せず、壁とは完全弾性衝突すると考える。



- (b) (a) の結果を利用し、 N 個の分子が壁 S に及ぼす力 F を速度の x 成分の二乗平均 $\langle v_x^2 \rangle$ を用いて表せ。さらに、 x, y, z の各方向の速度成分の二乗平均が同一であるとし、気体の状態方程式 $PL^3 = NkT$ を用いて、一分子の運動エネルギーの平均値 $E = \frac{m}{2} \langle (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) \rangle$ を計算せよ。ただし、 $\langle \dots \rangle$ は平均値を表し、 P, k, T, m はそれぞれ、気体の圧力、ボルツマン定数、気体の絶対温度、分子の質量である。

気体中の分子の速度は一定ではなく、ある分布をしている。つまり、分子を任意に選ぶとき、その分子の速度の x 成分 v_x は確率変数と考えられる。 v_x が u と $u + du$ の間にある確率を $\rho(u)du$ としよう。

- (c) x, y, z の三方向は同等であるので、分子の速度の y, z 成分 v_y, v_z も x 成分と同じ分布に従う確率変数となる。そして、各速度成分 v_x, v_y, v_z は独立な確率変数と考えられる。このとき、任意に取り出した分子の速度の各成分 v_x, v_y, v_z がそれぞれ u と $u + du$ 、 v と $v + dv$ 、 w と $w + dw$ の間にある確率を

$$\phi(u, v, w)du dv dw$$

と表すとき、関数 ϕ を ρ を使って表せ。

- (d) 気体のどの方向も同等なので、分布関数 ϕ は速度の大きさ (の 2 乗) だけの関数 $\phi(u^2 + v^2 + w^2)$ と考えられる。(c) で求めた関係式を u で微分した後、 $v = w = 0$ とおいたものと、 v で 2 回微分した後 $v = w = 0$ とおいたものを比べて、 ρ の方程式を導き、この方程式を解け (2 つの任意定数の値は、次の問で決定する)。
- (e) 全確率が 1 となる条件 (規格化条件と呼ばれる)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} du dv dw \phi(u^2 + v^2 + w^2) = 1$$

を使って前問で得られた 2 つの定数の間の関係を導け。さらに運動エネルギーの平均値

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} du dv dw \frac{m}{2} (u^2 + v^2 + w^2) \phi(u^2 + v^2 + w^2)$$

を計算し、この結果を (b) の結果と比較することで、分布関数 ϕ を求めよ。

(注)1859 年の論文でマクスウェル (Maxwell) はこの推論に基づいて気体中の分子の速度分布を初めて求めた。このため、(e) で得られる分布をマクスウェル分布と呼ぶ。