〈第3回〉.

$\boxed{1}$ 「1番目に当たりを引く」事象をA、
「2番目に …」 B、
「3番目に …」 C … とする。

$$P(A) = 3/10.$$
$$P(B) = \left(\frac{3}{10} \times \frac{2}{9}\right) + \left(\frac{7}{10} \times \frac{3}{9}\right) = 3/10$$
$$P(C) = \left(\frac{3}{10} \times \frac{2}{9} \times \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{3}{10} \times \frac{7}{9} \times \frac{2}{8}\right) + \left(\frac{7}{10} \times \frac{3}{9} \times \frac{2}{8}\right) + \left(\frac{7}{10} \times \frac{6}{9} \times \frac{3}{8}\right) = 3/10.$$
$\vdots$

∴ くじが当たる確率は順番に依らない。

$\boxed{2}$ (a).

$$\Phi_x(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi x} p(x)\, dx$$

$$e^{i\xi x} = 1 + i\xi x + \frac{1}{2!}(i\xi x)^2 + \frac{1}{3!}(i\xi x)^3 + \cdots$$ と級数展開できるので.

$$\Phi_x(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ 1 + i\xi x + \frac{1}{2!}(i\xi x)^2 + \cdots \right\} p(x)\, dx$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} p(x)\,dx + i\xi \int_{-\infty}^{\infty} x\, p(x)\,dx + (i\xi)^2 \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x)\,dx + \cdots$$
$$= 1 + i\xi \cdot \langle x \rangle + \frac{(i\xi)^2}{2!} \langle x^2 \rangle + \cdots$$

$$m_1 = E((x-\mu)^1) = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)\, p(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} x\, p(x)\,dx - \mu \int_{-\infty}^{\infty} p(x)\,dx$$
$$= \langle x \rangle - \mu.$$

$$m_2 = E((x-\mu)^2) = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2$$

$\vdots$

(b). 二項分布.

$$\Phi_X(\xi) = \langle e^{i\xi x} \rangle = \sum_{x=0}^{n} e^{i\xi x} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

$$= \sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x} (pe^{i\xi})^x (1-p)^{n-x}$$

$$= (pe^{i\xi} + 1-p)^n$$ ← 特性関数.

1次モーメント:
2次モーメント

$$\Phi_X(\xi) = (pe^{i\xi} + 1-p)^n$$

$$= 1 + np(i\xi) + \frac{1}{2!}\left(n(n-1)p^2 + np\right)(i\xi)^2 + \cdots$$

より、

$E(x) = np$

$E(x^2) = n(n-1)p^2 + np$.

⇒ $m_1 = E((x-\mu)) = 0$.

$m_2 = E((x-\mu)^2) = np(1-p)$. ←

(c) Poisson 分布.

$$\Phi_X(\xi) = \sum_{x=0}^{\infty} e^{i\xi x} p(x)$$

$$= \sum_{x=0}^{\infty} e^{i\xi x} \cdot \frac{\mu^x}{x!} e^{-\mu}$$

$$= \sum_{x=0}^{\infty} \frac{(e^{i\xi}\mu)^x}{x!} e^{-\mu} = e^{-\mu} \cdot e^{\mu e^{i\xi}} = e^{\mu(e^{i\xi}-1)}$$ ←

$i\xi$に関してべき展開すると、

$$= 1 + \mu \cdot (i\xi) + (\mu^2 + \mu)\frac{(i\xi)^2}{2!} + \cdots$$

∴ $m_1 = 0$.

$m_2 = \mu$. ←

(d) Gauss分布.

$$\phi_X(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi x} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx.$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi x - \frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx.$$

$$i\xi x - \frac{(x-m)^2}{2\sigma^2} = -\frac{1}{2\sigma^2}(x - m - i\xi\sigma^2)^2 + im\xi - \frac{\sigma^2\xi^2}{2}$$

と変形して.

変数変換. $u = (x - m - i\xi\sigma^2)/\sigma$ により. $\left(du = \frac{dx}{\sigma}\right)$.

$$\phi_X(\xi) = e^{im\xi - \frac{\sigma^2\xi^2}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du}_{=\sqrt{2\pi}}.$$

$$= e^{im\xi - \frac{\sigma^2\xi^2}{2}}$$

べき展開すると.

$$= 1 + \left(im\xi - \frac{\sigma^2\xi^2}{2}\right) + \frac{1}{2!}\left(im\xi - \frac{\sigma^2\xi^2}{2}\right)^2 + \cdots$$

$$= 1 + im\xi + \frac{1}{2!}(\sigma^2 + m^2)(i\xi)^2 + \cdots$$

$\therefore m_1 = 0$

$m_2 = \sigma^2$

$\boxed{3}$

2項分布の特性関数は.

$$\phi_X(\xi) = (1 - p + pe^{i\xi})^n$$

$$= \exp\{n \cdot \log(1 - p + pe^{i\xi})\}$$ と書ける.

$\xi$について展開.

$$\log(1 - p + pe^{i\xi}) = 0 + ip\xi - \frac{1}{2}p(1-p)\xi^2 +$$

$$\frac{1}{6}p(1-p)(1-2p)(i\xi$$

$+$

となる。

$$\Rightarrow \quad \Phi_X(\xi) = \exp\left\{ inp\xi - \frac{1}{2}np(1-p)\xi^2 + \frac{1}{6}np(1-p)(1-2p)(i\xi)^3 + \cdots \right\}$$

$p \sim 1/2$ なので、

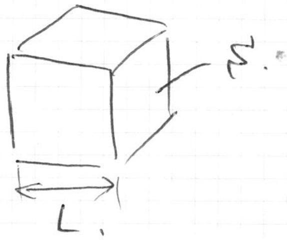
$$\sim \exp\left\{ inp\xi - \frac{1}{2}np(1-p)\xi^2 \right\}$$ ← 正規分布の $\Phi_X(\xi)$。

~~正規分布において~~ 平均 $m = np$，分散 $\sigma^2 = npq$.

$n =$ 大，$p \sim 1/2$ の極限では、

2項分布の平均と分散は、正規分布の平均，分散に一致。
$np$，$npq$　　　　$m$，$\sigma^2$

4 (a)．衝突回数：$\dfrac{v_x t}{2L}$.




1回の衝突での力積：$f\Delta t = mv_x - m(-v_x)$
$= 2mv_x$.

(b)．$t$ 秒間での分子1つの力積：$\dfrac{v_x t}{2L} \cdot 2mv_x = \dfrac{mv_x^2}{L} \cdot t$.

$N$ つの分子が ~~$v_x$~~
壁 $S$ に与える力積：$m\langle v_x^2\rangle \cdot \dfrac{N}{L} \cdot \cancel{t} = F \cdot \cancel{t}$.

$$\therefore F = m\langle v_x^2\rangle \cdot N/L.$$

(b) つづき.

平均運動エネルギー $E = \frac{m}{2} \langle (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) \rangle = \frac{3}{2} m \langle v_x^2 \rangle$.

$pv = nRT$.

$\to PL^3 = NkT$.

$P = F/L^2 = Nm\langle v_x^2 \rangle \cdot / L \cdot L^2$

$\therefore PL^3 = \cancel{N} m \langle v_x^2 \rangle = \cancel{N} kT$.

$m \langle v_x^2 \rangle = kT$. $\therefore E = \frac{3}{2} kT$

$T = 300 [K]$

$k_B = 1.38 \times 10^{-23} [m^2 kg s^{-2} K^{-1}]$ J

とすると.

1 mol 分では $6 \times 10^{23} \times 1.4 \times 10^{-23} \times 300 \sim 2.5 kJ/mol$.

(c). $\phi(u, v, w) \, du dv dw = \rho(u) du \, \rho(v) dv \, \rho(w) dw$.

$\therefore \phi(u, v, w) = \rho(u) \rho(v) \rho(w)$.

(d) 両辺微分すると.

$* \quad \partial_u \phi(u^2+v^2+w^2) \Big|_{v=w=0} = \partial_u \rho(u) \cdot \rho^2(0)$

$\therefore 2u\phi' = \rho'(u) \rho^2(0)$. $\cdots (*)$

また, $* \quad \partial_v^2 \phi(u^2+v^2+w^2) \Big|_{v=w=0} = \partial_v^2 \rho(v) \cdot \rho(u) \rho(w) \Big|_{v=w=0}$.

$\partial_v (2v\phi'(\ldots)) \Big|_{v=w=0} = \rho''(0) \rho(u) \rho(0)$.

$\left( \frac{\partial(2v)}{\partial v} \phi' + 2v \frac{\partial \phi'}{\partial v} \right) \Big|_{v=w=0} = 2\phi' = \rho''(0) \rho(u) \rho(0)$. $\cdots (*$

以上(*)、(*)(*)より。

$$u\,\rho''(0)\,\rho(u) = \rho'(u)\,\rho(0).$$

$\rho(u) = a\,e^{-bu^2}$ とおく。

$$\begin{cases} \rho' = -2abu\,e^{-bu^2} \\ \rho'' = -2ab\,e^{-bu^2} + 4abu^2 e^{-bu^2} \end{cases}$$

上式に代入して、

$$u \cdot (-2ab) \cdot a e^{-bu^2} = -2abu\,e^{-bu^2} \cdot a.$$

$$-2a^2bu\,e^{-bu^2} = -2a^2bu\,e^{-bu^2} \quad \text{一致}。$$

$$\therefore\ \rho(u) = a\,e^{-bu^2}$$

(※ 普通に変数分離で解いてもO.K.)

(e). 規格化条件: $\iiint du\,dv\,dw\,\phi(u^2+v^2+w^2) = 1.$

$$= \left[\int_{-\infty}^{\infty} du\,\rho(u)\right]^3$$

$$= \left[\int_{-\infty}^{\infty} du \cdot a\,e^{-bu^2}\right]^3$$

$$= \left(a \cdot \sqrt{\frac{\pi}{b}}\right)^3 = 1. \qquad \therefore\ \sqrt{\frac{\pi}{b}} \cdot a = 1.$$

K.E.

$$E = \left[\int_{-\infty}^{\infty} du \cdot \frac{m}{2}u^2 \cdot a e^{-bu^2}\right] + \left[\quad dv\right] + \left[\quad dw\right]$$

$$= 3 \times \left[\int_{-\infty}^{\infty} du \cdot \frac{m}{2}u^2 \cdot a e^{-bu^2}\right]$$

$$= 3 \times \left[\int_{-\infty}^{\infty} du\,\frac{ma}{2} \cdot -\frac{\partial}{\partial b}\,e^{-bu^2}\right]$$

$$= 3 \times \left[-\frac{ma}{2} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial b}\right)\sqrt{\frac{\pi}{b}}\right)$$

↓ cont'd.

cont'd.

$$E = 3\times\left(\frac{am}{4}\cdot\sqrt{\pi}\cdot b^{-3/2}\right)$$

前頁の規格化条件より $a=\sqrt{b/\pi}$.

$$= 3\times\left(\frac{m}{4}\cdot\frac{1}{b}\right)$$

$$= \frac{3m}{4b}$$

$E = 3/2\, kT$.

$$\therefore\ b = \frac{3m}{4E} = \frac{m}{2kT}$$

$$a = \sqrt{b/\pi} = \sqrt{\frac{m}{2\pi kT}}$$

∴ 気体中の分子の速度の確率密度関数は、

$$\phi(u,v,w) = \left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{m}{2kT}(u^2+v^2+w^2)\right)$$