

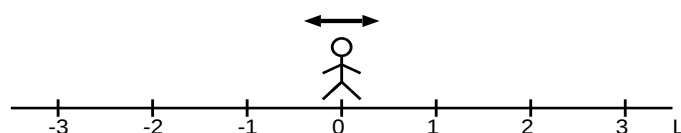
- 1 n 個の箱の中に r 個の玉を入れるとする．次の場合にそれぞれ何通りの入れ方があるか．

- (a) 箱も玉も区別するとき．
- (b) 玉は区別しないで箱だけ区別するとき．
- (c) 玉は区別しないで箱は区別するが、1つの箱には1つの玉しか入らないとき．

[注] この3種類は統計力学の基本的な数え方で、(a) は古典的なマクスウェル・ボルツマン統計、(b) は光子や核を扱うときに用いるボーズ・アインシュタイン統計、(c) は電子や陽子を扱うときに用いるフェルミ・ディラック統計に相当している．

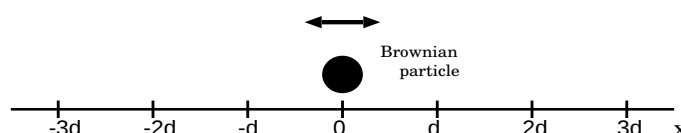
- 2 (a) N 個の気体分子が体積 V の容器に詰められている．容器中のある小部分の体積を v とするとき、 n 個の気体分子をこの小部分中に見出す確率を求めよ．
- (b) ある放射性物質は1分間に平均2個の放射性粒子を放出する．この放射性物質が1分間に3個以上の放射性粒子を放出する確率はいくらか．
- (c) Jack と Betty が午後7時から8時までの間に某レストランで会うことにした．但し、お互いに15分間だけは待つという約束であった．2人は7時から8時までの間に互いに独立に無作為にレストランに到着するものとして、この2人が会うことになる確率はいくらか？

- 3 図のように目盛をふった道の上をランダムに歩いて行くゲーム (酔歩) を考えよう．毎回コインを投げ、表が出れば一目盛右に、裏が出れば一目盛左に移動するものとする．コインを投げたとき表が出る確率を p 、裏が出る確率を $q = 1 - p$ とする．



- (a) 原点0から出発したプレイヤーが N 回コインを投げたところ、 r 回表が出た．この事象の起こる確率 $P(r, N)$ と、(r 回表が出たときの) プレイヤーの変位 L を求めよ．

1次元ブラウン運動する微粒子の位置 X_t を d の間隔で目盛を刻んだモノサシを用い、時間間隔 τ 毎に観測を行う．このときの微粒子の位置 X_t は、前述のゲームで $p = q = \frac{1}{2}$ と置いたものと同等であることが知られている．



- (b) 時刻 $t = N\tau$ での微粒子の位置 $X_t = L \times d$ の特性関数

$$\phi_{\tau,d}(\xi, t) = \langle e^{i\xi L d} \rangle$$

を求めよ．ただし、 $\langle \cdots \rangle$ は (a) で求めた確率に対する平均を表す．

- (c) $d = \sqrt{2D\tau}$ (D は正の定数) の関係が成り立つとき、次の極限を求めよ．

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \log \phi_{\tau, \sqrt{2D\tau}}(\xi, t) = \log \phi_0(\xi, t)$$

- (d) 特性関数の極限 $\phi_0(\xi, t)$ から時刻 t での微粒子の位置 X_t の分布関数 $\rho(x, t)$ を求めよ .

[注 : ガウス分布 (m を平均、 σ^2 を分散として)

$$\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right)$$

の特性関数 $\phi(\xi)$ が

$$\phi(\xi) = \exp\left(i\xi m - \frac{\sigma^2 \xi^2}{2}\right)$$

で与えられることを使っても良い . (確率分布 $\rho(x)$ から特性関数 $\phi(\xi)$ への変換は一般にフーリエ逆変換になっており、逆に $\phi(\xi)$ をフーリエ変換して $\rho(x)$ を求めることも可能です .)

- (e) 時刻 $t = N\tau$ に微粒子の位置が $x = Ld$ に見出される確率を $P(x, t)$ とする . 微粒子が時刻 $t = N\tau - \tau$ に位置 x' に到達する事象と、次の時刻 $t = N\tau$ に左右どちらかに d 移動する事象とは独立である . このことを利用して、 $P(x, t)$ と $P(x \pm d, t - \tau)$ の関係式を求めよ .
- (f) $P(x, t)$ が変数 t と x のどちらについても滑らかであるとすると、 $P(x \pm d, t - \tau)$ はどちらの変数についてもテーラー展開できる . $d = \sqrt{2D\tau}$ の関係が成り立つとき、 $\tau \rightarrow 0$ の極限を取り (e) の結果から $P(x, t)$ の満たす偏微分方程式を求めよ .
- (g) (d) で求めた分布関数 $\rho(x, t)$ が (f) の方程式を満たすことを確かめよ .