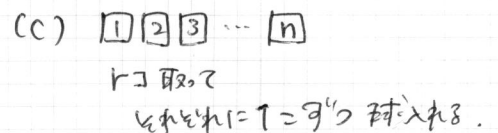
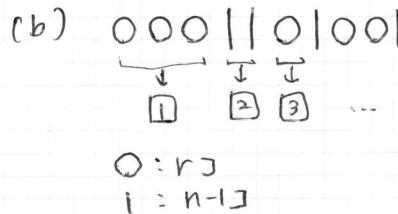
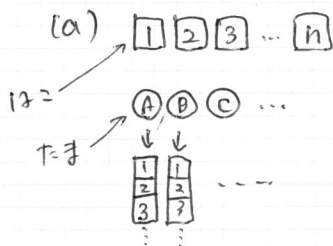


< 4回 >

□ (a) n^r

$$(b) \quad nHr = {}_{n+r-1}C_r = \frac{n(n+1)\dots(n+r-1)}{r!} \Leftrightarrow \frac{(n+r-1)!}{r!(n-1)!}$$

$$(c) \quad nCr = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$



□ (a) 容器中の気体分子は一律に存在し得ることを考える。

従って、体積 v の小部分中に 1 個の新分子を見出す確率は

$$p = v/V$$

また、全部で N 個の分子のうちから n 個を選び出す場合の数は

$$NC_n$$

$$\text{従って、求める確率は } W_n = NC_n \left(\frac{v}{V}\right)^n \left(1 - \frac{v}{V}\right)^{N-n}$$

(b) Poisson 分布に従う $p(x) = \frac{\mu^x}{x!} e^{-\mu}$

$\mu = 2$ 個である。

$$p(x) = \frac{2^x}{x!} e^{-2} \quad x = \text{個数}$$

$$p(0) = \frac{2^0}{0!} e^{-2} \approx 0.135$$

$$p(1) = \frac{2^1}{1!} e^{-2} \approx 0.271$$

$$+) \quad p(2) = \frac{2^2}{2!} e^{-2} \approx \text{0.271}$$

$$p(0) + p(1) + p(2)$$

$$\approx \text{0.677}$$

$$1 - p(0) - p(1) - p(2) = 1 - 0.677 = 0.323 \dots$$

従って、1 分間に 3 個以上放出する確率は、約 0.32

(C). Jack と Betty の到着時刻をそれぞれ $X+7$, $Y+7$ とおく.

確率変数 X, Y の密度関数 $f(x), g(y)$ は.

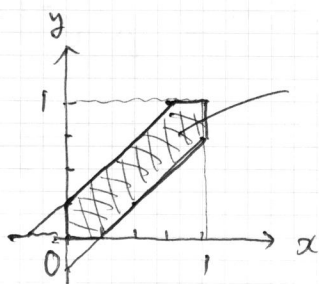
$$f(x) = \begin{cases} 1 & , 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{ elsewhere.} \end{cases}$$

$$g(y) = \begin{cases} 1 & , 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{ elsewhere.} \end{cases}$$

2人が出会うためには $|x-y| \leq 1/4$ (15 min) が必要.

領域 $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, |x-y| \leq 1/4\}$

を求めて.



この面積内に

2人が ~~到着時刻~~ 到着時刻が合えば.

7/16

→

$$[3] (a) P(r, N) = {}^N C_r p^r q^{N-r}$$

$$L = \underbrace{r}_{\text{2nd}} - \underbrace{(N-r)}_{\text{3rd}} = 2r - N$$

$$(b) \phi_{T,d}(\beta, t) = \langle e^{i\beta L} \rangle$$

$$= \langle e^{i\beta d (2r - N)} \rangle$$

$$= e^{-i\beta d N} \sum_{r=0}^N \frac{N!}{r! (N-r)!} \underbrace{p^r q^{N-r}}_{\substack{(pe^{2i\beta d})^r \\ q^{N-r}}} e^{2i\beta d r}$$

$$= e^{-i\beta d N} (p e^{2i\beta d} + q)^N$$

$$= (p e^{i\beta d} + q e^{-i\beta d})^N$$

$$p = q = 1/2 \text{ then } = \left(\frac{e^{i\beta d} + e^{-i\beta d}}{2} \right)^N$$

$$= \cos^N(\beta d)$$

— /

$$(c) \phi_{T,d}(\beta, t) = \cos^N(\beta d)$$

$$= \cos^N(\beta \cdot \sqrt{2Dt})$$

$$\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2} \text{ then } = \left(1 - \frac{\beta^2}{2} (2Dt) + \dots \right)^N$$

$$t = T/N \quad = \left(1 - D\beta^2 \frac{T}{N} \right)^N$$

$$\xrightarrow[N \rightarrow \infty]{T \rightarrow 0} e^{-D\beta^2 T} = \phi_0$$

— /

ELC12.

$$\begin{aligned}
 \log \phi(z, t) &= N \log (\cos (z \cdot \sqrt{2D\tau})) \\
 &= \frac{t}{\tau} \log (\cos (z \cdot \sqrt{2D\tau})) \\
 &= \frac{t}{\tau} \left\{ -\frac{1}{2} (z \cdot \sqrt{2D\tau})^2 + \dots \right\} \\
 &= -Dz^2 t.
 \end{aligned}$$

$$\therefore \phi_0 = e^{-Dz^2 t}$$

(d) $\sigma = \sqrt{2D\tau}$, $m=0$ & 334.

$$p(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi D\tau}} \exp\left(-\frac{x^2}{4D\tau}\right)$$

* 直接解出, 7-11 逆变换.

$$\begin{aligned}
 &\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \phi_0(z) e^{-izx} dz \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-Dz^2 \tau} \cdot e^{-izx} dz \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-D\tau(z^2 + \frac{ix}{D\tau} z)} dz \\
 &= \frac{1}{2\pi} \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-D\tau(z^2 + \frac{ix}{2D\tau})^2} dz \right] \cdot e^{-\frac{x^2}{4D\tau}} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{4\pi D\tau}} e^{-\frac{x^2}{4D\tau}}
 \end{aligned}$$

$$(e) \quad P(x, t) = \underbrace{\frac{1}{2}}_p \cdot P(x-d, t-\tau) + \underbrace{\frac{1}{2}}_q \cdot P(x+d, t-\tau)$$

(f) $\tau \rightarrow 0, d \rightarrow 0, P \rightarrow z$

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{2} \left\{ \cancel{\partial_x P(x, t)} \cdot (-d) + \cancel{\partial_x P(x, t)} \cdot (+d) \right. \\ &\quad + \partial_t P(x, t) \cdot (-\tau) + \partial_t P(x, t) \cdot (+\tau) \\ &\quad + \frac{1}{2} \partial_{xx} P(x, t) \cdot (-d)^2 + \frac{1}{2} \partial_{xx} P(x, t) \cdot (+d)^2 \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \partial_{tt} P(x, t) \cdot (-\tau)^2 + \dots \right\} \end{aligned}$$

$$\rightarrow \therefore \partial_t P(x, t) = \frac{1}{2} \cdot \frac{d^2}{\tau} \cancel{P(x, t)} \partial_{xx} P(x, t)$$

$$d = \sqrt{2D\tau} \text{ s.t.}$$

$$\partial_t P(x, t) = D \partial_{xx} P(x, t) \quad \dots (*)$$

拉普拉斯方程 $\leftarrow \Delta$

(g) (a)の解を代入して、微分式(*)の左辺 = 右辺 であることを示す。

$$\begin{aligned}\partial_t P(x,t) &= \frac{1}{\sqrt{4\pi b}} \left(-\frac{1}{2} + \frac{x^2}{2b}\right) \exp\left(-\frac{x^2}{4bt}\right) \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{4\pi b}} \exp\left(-\frac{x^2}{4bt}\right) \cdot \frac{x^2}{4b} t^{-2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{4\pi b}} \exp\left(-\frac{x^2}{4bt}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2t} + \frac{x^2}{4bt^2}\right) \quad \dots (1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\partial_{xx} P(x,t) &= \partial_x \left[\frac{1}{\sqrt{4\pi b}} \exp\left(-\frac{x^2}{4bt}\right) \cdot \left(-\frac{x}{2bt}\right) \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{4\pi b}} \exp\left(-\frac{x^2}{4bt}\right) \cdot \frac{x^2}{4b^2 t^2} \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{4\pi b}} \exp\left(-\frac{x^2}{4bt}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2bt}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{4\pi b}} \exp\left(-\frac{x^2}{4bt}\right) \cdot \left\{ \frac{x^2}{4b^2 t^2} - \frac{1}{2bt} \right\} \quad \dots (2)\end{aligned}$$

(1)(2)より、 $\partial_t P = D \partial_{xx} P$

→